

مجموعه ۳۰ نمونه سوال اتحاد چاق و لاغر

مجموع و تفاضل مکعبات همراه با پاسخ تشریحی

معرفی اتحادها:

۱. اتحاد مجموع مکعبات: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

۲. اتحاد تفاضل مکعبات: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

نکته کلیدی: علامت داخل پرانتز لاغر (کوچک) همیشه هم علامت با عبارت اصلی است و علامت جمله وسط در پرانتز چاق (بزرگ)، قرینه آن می باشد.

بخش اول: گسترش و ضرب عبارات (تشخیص اتحاد)

سوال ۱:

حاصل ضرب عبارت $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ را به کمک اتحاد به دست آورید.

پاسخ: این عبارت دقیقاً فرم اتحاد مجموع مکعبات را دارد. در اینجا $a = x$ و $b = 2$ است. پرانتز دوم شامل مربع اولی، قرینه حاصل ضرب، و مربع دومی است.

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$$

سوال ۲:

حاصل $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ را محاسبه کنید.

پاسخ: این عبارت فرم اتحاد تفاضل مکعبات است با $a = y$ و $b = 3$.

$$(y - 3)(y^2 + 3y + 9) = y^3 - 3^3 = y^3 - 27$$

سوال ۳:

حاصل عبارت $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$ چیست؟

پاسخ: با فرض $x = 2a$ و $y = 1$ ، می‌بینیم که پرانتز چاق مربع این جملات را دارد.

$$(2a + 1)((2a)^2 - (2a)(1) + 1^2) = (2a)^3 + 1^3 = 8a^3 + 1$$

سوال ۴:

عبارت $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$ را ساده کنید.

پاسخ: در اینجا جمله اول $3x$ و جمله دوم $2y$ است. علامت پرانتز لاغر منفی است، پس اتحاد تفاضل مکعبات است.

$$(3x)^3 - (2y)^3 = 27x^3 - 8y^3$$

سوال ۵:

حاصل $(x^2 + 5)(x^4 - 5x^2 + 25)$ را بنویسید.

پاسخ: در اینجا متغیر ما x^2 است. پس مکعب آن محاسبه می‌شود.

$$(x^2)^3 + 5^3 = x^6 + 125$$

بخش دوم: تجزیه عبارات جبری (مبتدی)

سوال ۶:

عبارت $x^3 - 64$ را تجزیه کنید.

پاسخ: عدد ۶۴ برابر است با 4^3 . پس از فرمول تفاضل مکعبات استفاده می‌کنیم:

$$x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

سوال ۷:

عبارت $8y^3 + 27$ را تجزیه کنید.

پاسخ: می‌دانیم $8y^3 = (2y)^3$ و $27 = 3^3$.

$$(2y)^3 + 3^3 = (2y + 3)(4y^2 - 6y + 9)$$

سوال ۸:

چند جمله‌ای $125a^3 - 1$ را به عامل‌های ضرب تجزیه کنید.

پاسخ: $125a^3 = (5a)^3$ و $1 = 1^3$.

$$(5a - 1)(25a^2 + 5a + 1)$$

سوال ۹:

فرم تجزیه شده $m^3 + 1000$ را بنویسید.

پاسخ: عدد ۱۰۰۰ مکعب عدد ۱۰ است (10^3).

$$m^3 + 10^3 = (m + 10)(m^2 - 10m + 100)$$

سوال ۱۰:

عبارت $64x^3 - 27y^3$ را تجزیه کنید.

پاسخ: جملات مکعب کامل هستند: $(4x)^3$ و $(3y)^3$.

$$(4x - 3y)(16x^2 + 12xy + 9y^2)$$

بخش سوم: تجزیه عبارات (پیشرفته و ترکیبی)

سوال ۱۱:

عبارت $2x^3 - 54$ را تجزیه کنید.

پاسخ: ابتدا از فاکتور مشترک ۲ فاکتور می‌گیریم، سپس اتحاد چاق و لاغر را اعمال می‌کنیم:

$$2(x^3 - 27) = 2(x^3 - 3^3) = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

سوال ۱۲:

عبارت $x^4y + xy^4$ را تا حد امکان تجزیه کنید.

پاسخ: ابتدا از فاکتور مشترک xy استفاده می‌کنیم:

$$xy(x^3 + y^3)$$

سپس از اتحاد مجموع مکعبات بهره می‌بریم:

$$xy(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

سوال ۱۳:

عبارت $-a^3 + 8b^3$ را تجزیه کنید.

پاسخ: برای استفاده راحت‌تر از اتحاد، جای جملات را عوض می‌کنیم:

$$8b^3 - a^3 = (2b)^3 - a^3 = (2b - a)(4b^2 + 2ab + a^2)$$

سوال ۱۴:

عبارت $x^6 - y^6$ را تجزیه کنید.

پاسخ: می‌توانیم آن را به عنوان تفاضل مربع‌ها نگاه کنیم: $(x^3)^2 - (y^3)^2$

$$(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$$

اکنون هر دو پرانتز اتحاد چاق و لاغر هستند:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

سوال ۱۵:

عبارت $a^3 + \frac{8}{a^3}$ را تجزیه کنید.

پاسخ: جمله اول مکعب a و جمله دوم مکعب $\frac{2}{a}$ است.

$$(a + \frac{2}{a})(a^2 - a(\frac{2}{a}) + (\frac{2}{a})^2) = (a + \frac{2}{a})(a^2 - 2 + \frac{4}{a^2})$$

بخش چهارم: ساده کردن کسرهای جبری

سوال ۱۶:

کسر $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$ را ساده کنید.

پاسخ: صورت کسر را با اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$

با حذف $(x - 2)$ از صورت و مخرج، پاسخ $x^2 + 2x + 4$ خواهد بود.

سوال ۱۷:

حاصل کسر $\frac{a^3 + 27}{a^2 - 3a + 9}$ چیست؟

پاسخ: صورت را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(a + 3)(a^2 - 3a + 9)}{a^2 - 3a + 9} = a + 3$$

سوال ۱۸:

عبارت گویا $\frac{8x^3 - 1}{4x^2 + 2x + 1}$ را ساده کنید.

پاسخ: صورت به این شکل تجزیه می‌شود: $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$. پس از خط زدن پیرانتز بزرگ با مخرج، پاسخ $2x - 1$ به دست می‌آید.

سوال ۱۹:

کسر $\frac{x^3y^3 + 1}{xy + 1}$ را ساده کنید.

پاسخ: x^3y^3 همان $(xy)^3$ است. صورت را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{(xy + 1)(x^2y^2 - xy + 1)}{xy + 1} = x^2y^2 - xy + 1$$

سوال ۲۰:

کسر $\frac{125 - x^3}{x^2 + 5x + 25}$ را به ساده‌ترین حالت بنویسید.

پاسخ: صورت برابر است با $5^3 - x^3$.

$$\frac{(5 - x)(25 + 5x + x^2)}{x^2 + 5x + 25} = 5 - x$$

بخش پنجم: یافتن مقدار عددی عبارات

سوال ۲۱:

اگر بدانیم $x - y = 2$ و $x^2 + xy + y^2 = 7$ است، مقدار $x^3 - y^3$ چقدر است؟

پاسخ: طبق فرمول $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ ، کافی است مقادیر را جایگذاری کنیم:

$$x^3 - y^3 = 2 \times 7 = 14$$

سوال ۲۲:

اگر $a + b = 3$ و $a^2 - ab + b^2 = 5$ ، مقدار $a^3 + b^3$ را بیابید.

پاسخ: طبق اتحاد مجموع مکعبات:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 3 \times 5 = 15$$

سوال ۲۳:

با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب 10×37 را طوری نشان دهید که به اتحاد چاق و لاغر مربوط شود.

پاسخ: می‌دانیم $10 = (7 + 3)$ و $37 = (49 - 21 + 9) = (7^2 - 7 \times 3 + 3^2)$.

بنابراین این حاصل ضرب برابر با مجموع مکعبات ۷ و ۳ است:

$$7^3 + 3^3 = 343 + 27 = 370$$

سوال ۲۴:

مقدار عدد $\frac{99^3 + 1}{99^2 - 98}$ را بدون استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

پاسخ: صورت را با اتحاد مجموع مکعبات باز می‌کنیم ($1 = 1^3$).

$$\frac{(99 + 1)(99^2 - 99(1) + 1^2)}{99^2 - 99 + 1}$$

عبارت $99^2 - 98$ در مخرج دقیقاً همان $99^2 - 99 + 1$ است! پس پرانتزهای چاق با هم ساده می‌شوند. پاسخ: $99 + 1 = 100$.

سوال ۲۵:

اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، نشان دهید چگونه به کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را محاسبه کرد.

پاسخ: ابتدا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 16$.

حال از اتحاد چاق و لاغر برای توان ۳ استفاده می‌کنیم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2})$$

مقادیر را جایگذاری می‌کنیم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (4)(14 - 1) = 4 \times 13 = 52$$

سوال ۲۶:

حجم یک مکعب x^3 و حجم مکعب دیگر ۲۷ سانتی متر مکعب است. چند جمله‌ای نشان‌دهنده اختلاف حجم این دو مکعب را بنویسید و آن را به صورت حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنید.

پاسخ: اختلاف حجم برابر است با $x^3 - 27$.

تجزیه آن: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

سوال ۲۷:

ریشه حقیقی معادله $x^3 - 125 = 0$ را با روش تجزیه به دست آورید و ثابت کنید تنها یک ریشه حقیقی دارد.

پاسخ: معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 0$$

پراتنز اول ریشه $x = 5$ را می‌دهد. پراتنز دوم یک معادله درجه دو است که دلتای آن منفی است ($\Delta = 25 - 100 = -75$). چون دلتا منفی است، پراتنز چاق ریشه حقیقی ندارد. پس تنها ریشه حقیقی $x = 5$ است.

سوال ۲۸:

عبارت $(x+1)^3 - 1$ را به کمک اتحاد تفاضل مکعبات تجزیه کنید و به ساده‌ترین شکل درآورید.

پاسخ: فرض کنید $A = x+1$ و $B = 1$.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$((x+1) - 1)((x+1)^2 + (x+1)(1) + 1)$$

پراتنز اول برابر x می‌شود. پراتنز دوم را باز می‌کنیم:

$$x(x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 1) = x(x^2 + 3x + 3)$$

سوال ۲۹:

کسر $\frac{x^6 - 64}{x^2 - 4}$ را پس از تجزیه کامل، ساده کنید.

پاسخ: ابتدا صورت را به عنوان تفاضل مکعب‌ها در نظر می‌گیریم: $(x^2)^3 - 4^3$.

$$\frac{(x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16)}{x^2 - 4}$$

مخرج و پرانتز اول ساده می‌شوند و جواب برابر است با:

$$x^4 + 4x^2 + 16$$

سوال ۳۰:

مساحت مستطیلی برابر با $x^2 + 2x + 4$ و طول آن برابر با عرض مستطیل به علاوه ۲ (یعنی می‌خواهیم در پرانتزی ضرب شود تا حجم به دست آید). اگر بخواهیم مکعبی با حجم $x^3 - 8$ بسازیم، طول ضلع مجهول در این حاصل‌ضرب چقدر باید باشد؟

پاسخ: حجم متوازی‌السطوح برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع. اگر حجم $x^3 - 8$ باشد و مساحت قاعده $x^2 + 2x + 4$ باشد، طبق اتحاد:

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

بنابراین، بُعد سوم (یا طول ضلع مجهول) باید دقیقاً برابر با $(x - 2)$ باشد تا معادله برقرار شود.